УДК 517.9

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПЛАВАЮЩИХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

©И. А. Луковский

Обсуждаемый в докладе круг вопросов связан с исследованием нелинейных краевых задач со свободными границами, возникающих в различных проблемах динамики твердого тела, взаимодействующего с жидкой средой. Наиболее общими в этом плане представляются краевые задачи гидродинамической теории плавающих тел с емкостями, заполненными жидкостью. Становление и развитие этой теории вызваны практическими запросами кораблестроения и, в первую очередь, многочисленными проблемами динамики и прочности танкеров.

Рассматриваемые в докладе нелинейные краевые задачи описывают неустановившиеся волновые движения идеальной несжимаемой жидкости, вызванные движением твердого тела в ограничивающем его объеме и в его отсеках. В рамках постановки первой задачи динамики свободно плавающего тела ниже будет предложена формулировка этих краевых задач в подвижной жестко связанной с твердым телом системе координат, установлен вариационный принцип системы «твердое тело – жидкость», а также приведена соответствующая этому принципу вариационная формулировка указанных краевых задач. Кроме этого, на примере задачи о движении жидкости в полости тела будет рассмотрен вопрос о прямом методе решения нелинейной краевой задачи, основанном на ее вариационной формулировке.

Задачу о свободно плавающем твердом теле с отсеком, частично заполненным жидкостью, рассмотрим в предположениях существования безвихревых движений жидкости.

Введем в рассмотрение две системы координат $0'x'y'z'$ и $Oxyz$, первую из которых будем считать неподвижной, а вторую - неизменно связанной с твердым телом. Координатная плоскость $0'x'y'$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью внешнего по отношению к телу объема жидкости, а плоскость $0xy$ - с плоскостью пересечения $0'x'y'$ с твердым телом в невозмущенном движении.

Движение твердого тела характеризуется вектором поступательной скорости $\vec{v}_0$ точки 0 и вектором мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ относительно точки 0.

Безвихревые движения во внешнем и внутреннем объемах жидкости описываются потенциалами скоростей $\Phi_i(x', y', z', t)$ $(i = 1, 2)$, удовлетворяющими уравнению Лапласа, двум нелинейным граничным условиям на неизвестных заранее свободных поверхностях жидкостей, условию непротекания на смоченных поверхностях твердого тела, условию сохранения объемов и условию на бесконечности, а также начальным условиям при $t = 0$.

Давление внутри каждого объема жидкости после определения решений Φ_i находится из интеграла Лагранжа-Коши. Движение жидкости, взаимодействующей с твердым телом, зависит от кинематических параметров твердого тела, которые, в свою очередь, подчиняются дифференциальным уравнениям движения твердого тела с шестью степенями свободы.

В рамках постановки первой задачи динамики рассматриваемой механической системы закон движения твердого тела считается известным, а определению подлежит поле скоростей и поле давлений внешней и внутренней жидкостей. Для многих целей представляется удобным изучать абсолютное движение жидкости в подвижной системе координат $0xyz$. Исходя из основных законов динамики, соответствующие краевые задачи для потенциалов скоростей $\Phi_i(x, y, z, t)$ $(i = 1, 2)$ можно представить в следующем виде:

$$\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } Q_i,$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = \vec{v}_0 \cdot \vec{n} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \text{ на } S_i,$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = \vec{v}_0 \cdot \vec{n} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) + v_{ni} \text{ на } \Sigma_i, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_i)^2 - \nabla\Phi_i(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) + U_i = 0 \text{ на } \Sigma_i,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = 0 \text{ на } S_0,$$

где Q_i- области, занятые внешней и внутренней жидкостью; S_i- смоченные поверхности твердого тела и плоскости; S_0- поверхности дна океана; Σ_i- свободные поверхности жидкости; U_i- потенциалы поля сил тяготения; $\vec{v}_{ni}$- относительная скорость жидкости на свободных поверхностях Σ_i; $\vec{n}$- орт внешней нормали к поверхностям объемов Q_1 или Q_2. Индекс $i = 1$ относится к внешнему объему жидкости, а индекс $i = 2$ – к внутреннему. Давление p_i жидкости в областях Q_i определяется посредством решений краевых задач (1) из интеграла Лагранжа-Коши следующего вида:

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_i)^2 - \nabla\Phi_i(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) + U_i + \frac{p_i}{\rho_i} = 0, \tag{2}$$

где ρ_i- плотность жидкостей. Если уравнения свободных поверхностей жидкости представляются в виде $\zeta_i(x, y, z, t) = 0$, то относительные скорости v_{ni} определяются выражением

$$v_{ni} = -\frac{\zeta_{it}}{\sqrt{|\nabla\zeta_i|^2}}. \tag{3}$$

К выписанным уравнениям необходимо присовокупить некоторые дополнительные условия. В случае неограниченной области Q_1 уравнения (1), (2) дополняются условием затухания на бесконечности

$$|\nabla\Phi_1| \to 0 \ \text{ при } \ (x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty, \tag{4}$$

а для внутренней области Q_2– условием сохранения объема.

Кроме этого, полная математическая формулировка задачи для однозначного определения потенциалов скоростей Φ_i и уравнений свободной поверхности ζ_i требует задания начальных условий в момент времени $t = 0$.

Сформулированные задачи относятся к числу сложных краевых задач математической физики, в связи с чем до сих пор достигнуты незначительные успехи в применениях точной теории.

Исключением являются исследования Леви-Чивита, А.И.Некрасова и Струнка по существованию установившихся стационарных прогрессивных волн малой амплитуды и Лаврентьева, Фридрихса и Хайерса по существованию так называемой уединенной волны.

В большинстве исследований по волновым движениям в неограниченных и ограниченных объемах жидкости различные приближенные модели, полученные из краевых задач типа (1)-(2) преимущественно методами теории возмущений. Взаимодействие гидродинамических полей внешней и внутренней жидкости с твердым телом, описываемое граничными задачами (1), может быть описано также при помощи вариационного принципа. С этой целью введем в рассмотрение функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{5}$$

аналогичный по смыслу действию по Гамильтону. Роль функции Лагранжа L в (5) играет выражение

$$L = \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i} p_i dQ_i = -\sum_{i=1}^{2} \rho_i \int_{Q_i} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi_i)^2 - \nabla \Phi_i (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) + U_i \right] dQ_i. \tag{6}$$

На связь функции Лагранжа с давлением, по-видимому, впервые указал Бейтмен при формулировке вариационных принципов в некоторых задачах газовой динамики [2].

В настоящее время сформулирован целый ряд вариационных принципов [1,3-5], использующих действие в форме (5).

Для сформулированной выше задачи имеет место следующий вариационный принцип.

Вариационный принцип . *Действительные движения идеальных несжимаемых жидкостей, взаимодействующих со свободно плавающим телом, достигаются на стационарных точках функционала (5) при условиях сохранения объема Q_2, затухания на бесконечности (4), если движения сравнения совпадают с истинными в начальный и конечный моменты времени.*

В силу того, что части границ областей Q_i, задаваемые уравнениями $\zeta_i(x, y, z, t) = 0$, заранее неизвестны, функции $\Phi_i(x, y, z, t)$ необходимо определять в изменяющихся во времени областях $Q_i(t)$. Поэтому стационарные точки функционала (5) представляют собой пары, состоящие из искомых функций $\Phi_i(x, y, z, t)$ и областей их определения $Q_i(t)$.

При формулировке вариационной задачи, соответствующей указанному принципу, будем полагать, что действительные движения определяются искомыми функциями $\Phi_i(x, y, z, t)$ и $\zeta_i(x, y, z, t)$, а движения сравнения - функциями $\Phi_i + \partial\Phi_i$ и $\zeta_i + \partial\zeta_i$, причем для действительных движений и движений сравнения начальное и конечное положения системы являются одними и теми же.

В классе функций, непрерывных вместе с производными первого порядка по пространственным координатам и времени, выделим однопараметрические семейства пар $\Phi_i(x, y, z, t, \alpha)$ и $\zeta_i(x, y, z, t, \alpha)$, представляющих движения сравнения и содержащих параметр α произвольным образом (α достаточно близкое к нулю), причем при $\alpha = 0$ получаются действительные движения $\Phi_i(x, y, z, t) = = \Phi_i(x, y, z, t, 0)$, $\zeta_i(x, y, z, t) = \zeta_i(x, y, z, t, 0)$, для которых вычисляется первая вариация функционала (5).

Доказательство сформулированного принципа основано на общем определении первой вариации функций и первой вариации функционала с переменной областью интегрирования [1], на применении общих интегральных теорем поля и на использовании правила дифференцирования по времени интегральных величин с переменной областью интегрирования. В результате для первой вариации функционала (5) находим следующее выражение:

$$\delta I = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} \rho_i \{ \int_{\Sigma_i} [\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi_i)^2 - \nabla \Phi_i(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{g}\,\vec{r}] \frac{\delta \zeta_i}{\sqrt{|\nabla \zeta_i|^2}} dS +$$
$$\int_{\Sigma_i} [\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \vec{v}_0 \vec{n} - \vec{\omega}(\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\zeta_{it}}{\sqrt{|\nabla \zeta_i|^2}}] \delta \Phi_i dS +$$
$$\int_{S_i} [\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \vec{v}_0 \vec{n} - \vec{\omega}(\vec{r} \times \vec{n})] \delta \Phi_i dS + \int_{S_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \delta \Phi_1 dS -$$
$$\int_{Q_i(t)} \nabla^2 \Phi_i \delta \Phi_i dQ_i + \frac{d}{dt} \int_{Q_i(t)} \delta \Phi_i dQ_i \} dt = 0, \tag{7}$$

В силу произвольности вариаций функций $\delta \Phi_i$ и $\delta \zeta_i$ из выражения (7) следует, что стационарные в указанном выше смысле значения функционала (5) достигаются на решениях краевых задач (1).

Из приведенного принципа как частные случаи можно получить принцип Люка [5] для волновых движений неограниченной жидкости при отсутствии плавающего тела, а также вариационный принцип нелинейной теории пространственного движения твердого тела с полостями, содержащими жидкость [1].

Сформулированный выше принцип представляет большой интерес с точки зрения его использования для построения прямых методов решения краевых задач (1). Рассмотрим в общих чертах идейную сторону прямого метода на примере задачи, описывающей движение жидкости в полости твердого тела.

Сначала заметим, что кинематические граничные условия краевых задач (1) позволяют представить потенциал скоростей $\Phi_2(x, y, z, t)$ в виде

$$\Phi_2(x, y, z, t) = \vec{v}_0 \vec{V} + \vec{\omega} \vec{\Omega} + \varphi, \tag{8}$$

где $\vec{V}$ и $\vec{\Omega}$- гармонические векторы, проекции которых V_1, V_2, V_3 и Ω_1, Ω_2, Ω_3 на оси связанной системы координат $0xyz$ являются гармоническими функциями, удовлетворяющими краевым условиям

$$\left.\frac{\partial V_i}{\partial n}\right|_{S_2+\Sigma_2} = n_i, \quad \left.\frac{\partial \Omega_k}{\partial n}\right|_{S_2+\Sigma_2} = [\vec{r} \times \vec{n}]_k; \ (i = 1,2,3), \ (k = 1,2,3) \tag{9}$$

где n_i- проекции орта $\vec{n}$ на оси подвижных координат, $[\vec{r} \times \vec{n}]_k$- аналогичные проекции на те же оси векторного произведения. Гармоническая функция φ удовлетворяет граничным условиям

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{S_2} = 0; \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma_2} = -\frac{\zeta_{2t}}{\sqrt{(\nabla \zeta_2)^2}} \tag{10}$$

и описывает волновые движения жидкости в неподвижной полости. Введенные в рассмотрение гармонические потенциалы $\vec{V}$, Ω и φ зависят от времени, поскольку область их определения переменная.

Уравнение свободной поверхности $\zeta_2(x, y, z, t) = 0$ представим в виде, разрешенном относительно переменной z

$$z = f_2(x, y, t). \tag{11}$$

Предположим далее, что функция $f_2(x,y,t)$ может быть представлена в виде разложения

$$f_2(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(x,y), \tag{12}$$

где $f_i(x,y)$- полная ортогональная вместе с константой система функций, заданная на невозмущенной свободной поверхности жидкости, а $\beta_i(t)$- обобщенные коэффициенты Фурье, играющие роль обобщенных координат задачи. Потенциал скоростей φ конструктивно зададим в форме

$$\varphi(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t)\varphi_n(x,y,z), \tag{13}$$

где $\varphi_n(x,y,z)$- система гармонических функций, удовлетворяющих условию $\partial\varphi_n/\partial n = 0$ на смоченной поверхности полости S_2, $R_n(t)$-параметры, характеризующие изменение функции φ во времени. Такую совокупность гармонических функций удается эффективно построить, исходя из решений краевой задачи с параметром в граничном условии, сформулированной для невозмущенного объема жидкости Q_{20}.

Краевые задачи для потенциалов $\Omega_k(x,y,z,t)$ можно теперь построить вариационным методом, считая, что форма свободной поверхности задана и ее положение в любой момент времени определяется параметрами $\beta_i(t)$.

Решение этих задач эквивалѐнтно исследованию на экстремум квадратичных функционалов

$$L(\Omega_k) = \int_{Q_2} (\nabla\Omega_k)^2 dQ - 2 \int_{S_2+\Sigma_2} \Omega_k(\vec{r} \times \vec{n})_k dS. \tag{14}$$

Применяя метод Ритца, приближенные решения для функций Ω_k разыскиваются в виде

$$\Omega_k(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{q} R_j^{(k)}(t)\chi_j^{(k)}(x,y,z), \tag{15}$$

причем параметры $R_j^{(k)}(t)$ определяются системой линейных неоднородных алгебраических уравнений. При этом матрица коэффициентов Ритца и столбец правых частей, конечно же, являются функциями параметров $\beta_i(t)$, так что вектор $R^{(k)}(t)$ в результате является также функцией параметров $\beta_i(t)$.

Следовательно, в качестве неизвестных параметров задачи в целом можно выбрать переменные, фигурирующие в разложениях (12) и (13), т.е. $\beta_i(t)$, и $R_n(t)$. Относительно этих функций, исходя из сформулированного вариационного принципа, может быть выписана система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Галеркина, позволяющая определить приближенно потенциал скоростей Φ_2 (8).

В общем виде эта система представляется следующим образом [1]:

$$\frac{d}{dt}A_n - \sum_k R_k A_{nk} = 0, \quad n = 1,2,\ldots \tag{16}$$

$$
\sum_n \dot{R}_n \frac{\partial A_n}{\partial \beta_i} + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_n \sum_k R_k R_n \frac{\partial A_{nk}}{\partial \beta_i} +
$$
$$
+ \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_3 \frac{\partial l_{3\omega}}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{01} - g_1 + \omega_2 v_{03} - \omega_3 v_{02}) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{02} -
$$
$$
- g_2 + \omega_3 v_{01} - \omega_1 v_{03}) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} + (\dot{v}_{03} - g_3 + \omega_1 v_{02} - \omega_2 v_{01}) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2}\omega_1^2 \frac{\partial J_{11}^1}{\partial \beta_i} - \quad (17)
$$
$$
- \frac{1}{2}\omega_2^2 \frac{\partial J_{22}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2}\omega_3^2 \frac{\partial J_{33}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1\omega_2 \frac{\partial J_{12}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1\omega_3 \frac{\partial J_{13}^1}{\partial \beta_i} - \omega_2\omega_3 \frac{\partial J_{23}^1}{\partial \beta_i} -
$$
$$
- \frac{d}{dt}\left[\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \dot{\beta}_i}\right] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,
$$

где

$$
l_1 = \rho \int_{Q_2} x dQ; \; l_2 = \rho \int_{Q_2} y dQ; \; l_3 = \rho \int_{Q_2} z dQ,
$$
$$
A_n = \rho \int_{Q_2} \varphi_n dQ; \; A_{nk} = A_{kn} = \rho \int_{Q_2} (\nabla\varphi_n, \nabla\varphi_k) dQ,
$$
$$
l_{k\omega} = \rho \int_{Q_2} \Omega_k dQ; \; l_{k\omega t} = \rho \int_{Q_2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial t} dQ, \quad (18)
$$
$$
J_{ij}^1 = \rho \int_{S_2 + \Sigma_2} \frac{\partial \Omega_i}{\partial n} \Omega_j dS.
$$

Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (16), (17) имеет структурное сходство с аналогичными уравнениями Гамильтоновой механики. Эту систему можно заменить также системой уравнений второго порядка относительно параметров $\beta_i(t)$, разрешив предварительно уравнения (16) относительно $R_k(t)$.

В заключение отметим , что аналогичный прямой метод может быть развит и для определения потенциала скоростей $\Phi_1(x, y, z, t)$, что позволит составить общую систему нелинейных дифференциальных уравнений плавающего тела с отсеками, содержащими жидкость со свободной поверхностью. Этот подход, с нашей точки зрения, обладает определенной перспективой при анализе нелинейных явлений в рассматриваемых механических системах, которые изучались до сих пор преимущественно с позиций линейной теории.

1. *Луковский И.А.* , Введение в нелинейную динамику тела с полостями, содержащими жидкость // Киев, Наук. думка. - 1990.
2. *Bateman H.*, Partial differential equations of mathematical physics // New York, Dover publications. - 1944.
3. *Бердичевский В.Л.* , Вариационные принципы механики сплошной среды // М.: Наука. - 1983.
4. *Луковский И.А., Тимоха А.Н.* , Вариационные формулировки задачи о взаимодействии поверхности раздела «жидкость-газ» с акустическим полем // Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. - Киев: Ин-т математики АН Украины. - 1992. - С. 3-10.
5. *Luke J.C.*, A variational principle for a fluid with a free surface // Fluid Mech.- 1967. - **27**, - P. 395-397.